

## INTRODUCCIÓN

Los pensadores antiguos estuvieron de acuerdo en cuanto a la evidencia en sí de los principios del discurso.<sup>1</sup>

En su *Analítica Posterior*, Aristóteles adhiere a la creencia en la necesidad de la verdad de la premisa primaria del silogismo científico, afirmando que no es posible recorrer una serie infinita.<sup>2</sup> La premisa básica habrá de ser independiente de demostración, siendo un tope indemostrado o el final para la regresión demostrativa.

La geometría de los trazos conmensurables, en correspondencia con una aritmética racional, sirve de apoyo a la instauración de teorías inmovilistas, que se sirven de la inteligibilidad de los entes matemáticos para representar el aspecto de entes aún más generales e inmutables.<sup>3</sup> La matemática es propedeútica.<sup>4</sup>

Es cierto que Zenón utiliza la noción de serie infinita, pero lo hace en un sentido crítico negativo, para destruir la pluralidad de los seres sensibles, que contravienen la unidad racional del ser Parmenideo. “Y en efecto para el realismo de un eleata es la representación de la totalidad de los términos y no la regularidad de la ley de formación, lo que puede asegurar la existencia de la serie.”<sup>5</sup>

No se puede aceptar la afirmación de que toda la teoría griega haya estado presa en los límites de un pensamiento racional derivado de las técnicas geométricas para la construcción de figuras, idea sustentada por una multitud de intelectuales de todas layas, obedientes a la voz tradicional, cuyos paladines serían Pitágoras, Parménides, Platón y Aristóteles. Como contrapartida Arquímedes vence el prejuicio arraigado contra la infinitud, lo irracional por inconmensurable y mide, por ejemplo, el área parabólica, mediante una suma infinita de áreas triangulares, cuyo resultado es finito, racional.<sup>6</sup>

El estancamiento gradual de la matemática griega no es compatible con resultados como el anterior, en el cual se puede observar el estilo audaz de las matemáticas modernas. Se asocia a aquél el carácter contemplativo del pensamiento griego<sup>7</sup>, dominado por las doctrinas inmovilistas de Parménides y Platón. En varias ocasiones, Platón se sirve de rudimentos

<sup>1</sup> Salvo en la postura escéptica, que imposibilitaba toda ciencia desde principios, usando el discurso de modo autodestructivo, cuando no abandonaba toda conducta discursiva.

<sup>2</sup> Cfr. Aristóteles, *Analítica Posterior*, Libro I, Cap. 3

<sup>3</sup> A saber, entes ideales a los que se orienta la disciplina dialéctica. Cfr. Platón, *República*, 533

<sup>4</sup> Cfr. Paul Friedländer, *Plato, The dialogues first period*, pág. 283, Routledge & Kegan Paul, London, 1964

<sup>5</sup> León Brunschwig, *Las etapas de la filosofía matemática*, Cap. IX, El descubrimiento del cálculo infinitesimal, Sección A, La antigüedad, Zenón de Elea y Aristóteles, Editorial Lautaro, Buenos Aires, 1945, pág. 182

<sup>6</sup> Un cálculo tal se realiza en el contexto de las aplicaciones del método de exhaustión. Ibidem nota 5, pág. 186, *Infra*

geométricos para mostrar cómo ciertos conocimientos están impresos en el alma humana<sup>8</sup>, conocimientos estables, independientes del devenir sensible, eternos y absolutos. De esta índole serían las relaciones entre los elementos de las figuras y los teoremas no harían otra cosa que manifestar sus conexiones formales, el discurso propio en el elemento racional. Platón reconoce, no obstante, la inferioridad de la matemática respecto de la disciplina dialéctica, más general y rigurosa. Tiene consciencia de la irracionalidad de un sistema científico fundado sobre premisas indemostradas e indemostrables. De hecho la dialéctica busca constituir el fundamento de las ciencias teóricas. Se admite que las disciplinas matemáticas no son completamente falsas, pues manifiestan una consecuencia rigurosa a partir de sus principios, pero dejan sin resolver el problema de su fundamento último.<sup>9</sup>

Sabemos que Aristóteles tiene un conocimiento completo de las matemáticas de la Academia<sup>10</sup>, pero se sirve de ellas con afán crítico o para ejemplificar algún asunto metafísico. “Así el pretendido sofisma de Zenón jamás será refutado. Aristóteles no colmará el abismo cavado por la dialéctica del eleatismo, se contentará con recorrer sus dos bordes. Por una parte, puesto que no es posible al espíritu recorrer una infinidad de términos, enseñará que la constitución de la ciencia está ligada a la posición de un límite. Por otro lado, a la ciencia en acto del universo en acto opondrá la virtualidad de un devenir que aparece indeterminado e ilimitado.”<sup>11</sup>

Los ejercicios numéricos y geométricos, las reglas para la construcción de figuras se constituyen en una preparación del espíritu para mantenerse en el elemento racional, en el cual estaría contenida desde siempre toda la diversidad y la multitud prolífica de los teoremas y relaciones. El espíritu se limitaría a descubrir, a explicitar relaciones entre objetos ajenos a su voluntad y arbitrio.

Se puede ver, entonces, que entre los antiguos la matemática sufrió de lo que podríamos llamar un prejuicio ontológico. Había en los filósofos y matemáticos de la tradición pitagórica y platónica una especie de pudor ante lógica sujeta a la intuición sensible, por considerarla incapaz de ser un

---

<sup>7</sup> Cfr. Jean Piaget, *El pensamiento matemático*, Cap. 3, El pensamiento matemático y la realidad, págs. 242 y sgtes.

<sup>8</sup> Cfr. Platón, *Menón* 85 c, d y sgtes.; *Eutidemo* 296 c y sgtes.

<sup>9</sup> Cfr. Platón, *República* 533

<sup>10</sup> Cfr. Por ejemplo, Sobre la prioridad de la exactitud: *Analítica Posterior I* 27; 87 a 31 - 7; *Metafísica K* 3, 1061 a 28 - b3; *Física II* 2, 193b 31- 5, 194 a 1-7; De anima III 7, 431 b 12 - 16; Acerca de la necesidad en matemática, *Física II* 9, 200<sup>a</sup> 15 - 19; Historia de la matemática, *Metafísica A* 1, 981 b 20 - 5; Acerca de la belleza en matemáticas, *Metafísica B* 2, 996 a 29 - b1

Cfr. Thomas Heath, *Mathematics in Aristotle*, Oxford 1949

<sup>11</sup> Opus cit. Nota 5, pág. 183

instrumento eficaz para explicar la realidad, que sería de suyo trascendente e inteligible.

La evidencia del *dictum de omni et nullo* (el dicho acerca del todo y las partes), que en su versión geométrica<sup>12</sup> establece que el todo es mayor que la parte, se funda a fin de cuentas en una aptitud inmanente al espíritu, que posibilita en última instancia la comparación de objetos del mundo, en una constatación directa e intuitiva.

En los siglos posteriores al Renacimiento opera un cambio de actitud que queda bien representado en la prueba del absurdo contenido en tal principio, una vez aceptada la infinitud.<sup>13</sup> El valor de esta prueba reside en la relativización de los principios del discurso racional. En adelante, no se podrá pensar más en sistemas axiomáticos de valor absoluto. La conveniencia de establecer tales o cuales principios estará ligada a su virtualidad deductiva o demostrativa, a la libertad que signifique para el pensamiento, a su fecundidad teórica. Análogamente, el rigor lógico quedará a salvo mediante la reducción de la multitud de sistemas axiomáticos construibles, a una estructura general, por virtud de lo que se denomina isomorfismo estructural, a partir del cual se puede tratar a objetos distintos como si fueran idénticos. Un fenómeno teórico semejante se puede ver en la teoría de Espacios Vectoriales<sup>14</sup> y en la aún más general, teoría de grupos.

Conceptos tales como el de operación y transformación deben ser bien comprendidos. En efecto, no ha de escapar el hecho de que a la ciencia contemporánea le importa más operar con los entes de su interés que la simple contemplación. Es el fin de la conducta contemplativa y se la sustituye por la consciencia de la virtud operativa del pensamiento humano,

---

<sup>12</sup> La versión lógica del Dictum... establece que lo que se afirma del todo se afirma también de las partes.

<sup>13</sup> Para un examen histórico del concepto de infinito en matemáticas y acerca de la importancia de Georg Cantor (aprox. 1882) en este tema, Cfr. Bertrand Russell, *Our knowledge of the external world*, Lecture VI, The problem of infinity considered historically, A Mentor Book, 1960

<sup>14</sup> Extracto de una breve reseña histórica sobre vectores, contenida en un libro sobre el tema, de la Pontificia Universidad Católica de Stgo., Campus San Joaquín: "Tanto Descartes como Leibniz habían barruntado ya la noción, aunque sin éxito. Hacia 1806 Argand representa con éxito a los números complejos como vectores del plano, dando impulso a la teoría de la variable compleja. En 1926, Möbius publica un libro sobre Cálculo Baricéntrico, de gran influencia sobre las formas geométricas de Grassmann, quien las trata en su *Lineare Ausdehnungslehre*, de 1844. Bellavitis escribe sobre el cálculo de la equipolencia, introduciendo la igualdad y la adición geométrica de vectores.

La representación plana de los complejos por parte de Argand llevó a Hamilton a los *Cuaterniones*, en 1843, que son una mezcla de escalar y vector.

Ambos matemáticos, Grassmann y Hamilton generan un análisis vectorial, que no encuentra aún aplicación en la Física, por su dificultad. En lo que sigue se busca simplificar el álgebra vectorial. En 1881 el físico matemático Gibbs consigue lo que se esperaba, en unos apuntes para sus alumnos de Yale. Era un álgebra vectorial casi como el que conocemos hoy. La publicación formal de Gibbs vino recién hacia 1900. Las ideas de Gibbs serán asimiladas por la escuela italiana (Marcolongo, Burali-Forti, Ricci, Levi-Civita, etc.) que suscita el análisis vectorial y tensorial de gran influencia en la Geometría diferencial y la Teoría de la relatividad general de Einstein."

ya sin pretensiones ontológicas. La ciencia -la matemática- no sería más que un juego complejo, como cualquier otro, si no fuera por los prodigios logrados en la forma de una tecnología cada vez más sofisticada. He aquí que comienzan los problemas.

En adelante, la inteligencia está frente a la realidad como un pensamiento independiente, reducido a una “objetividad intrínseca”<sup>15</sup>, en un estado de autoconsciencia tal que descubre en sí mismo los principios operatorios básicos de su actividad.

Una vez descubierta la posibilidad de cambio, incluso de las concepciones más arraigadas y firmes, es difícil volver a creer en topes del avance intelectual humano, como no sea la eventual incapacidad para hallar nuevas vías de desarrollo y no en las condiciones de un objeto de pensamiento, eterno y absoluto.

Platón descalifica a las ciencias matemáticas por considerarlas fábrica de convenciones. Paradojalmente, esta misma cualidad ha permitido a la matemática moderna y contemporánea habérselas mejor con la realidad. De modo que la crisis de fundamento no afecta a la fantasía matemática.

La que parece una lógica más rigurosa, que rechaza el movimiento, el infinito y el examen del continuo numérico, por considerarlos plausibles de error, se revela a la larga insuficiente y falta de criterio para abordar la diversidad del mundo.

## GNOSEOLOGÍA EN LENGUAJE VECTORIAL

El punto de partida es considerar a todo sistema filosófico como un modelo epistemológico<sup>16</sup>, una representación humana de la realidad considerada de un modo total.

Desde este punto de vista, bastante difundido, los sistemas filosóficos tradicionales deben modificarse, si no en los conceptos, al menos en el lenguaje, para unificar los distantes ámbitos de la ciencia y la filosofía tradicional.

En la actualidad, se considera el sujeto sustancial como una reliquia de la historia de la filosofía, pues podemos reducirlo todo a puras cualidades, al modo del fenomenalismo, o bien, podemos denunciar la arbitrariedad básica de la construcción conceptual, en una postura cercana a la filosofía científica. Como sea que concibamos el mundo y su relación con la condición cognoscitiva humana, deberemos dar cuenta de los problemas suscitados por el cambio teórico, deberemos dar, por ejemplo, una

---

<sup>15</sup> Fórmula de P. Boutroux, opus cit. nota 7, pág. 254

<sup>16</sup> Cfr. Jorge Estrella, *La inducción y la definición. Un análisis semántico*, Editorial Universitaria,

interpretación consistente, de la llamada definición esencial, tan cara a la tradición filosófica. ¿Cómo distinguimos, en efecto, de entre todas las cualidades de un objeto, las cualidades esenciales? Tal vez resulte necesario eliminar el concepto de esencia o cambiarlo por otro equivalente, más preciso y menos ambicioso.

En el camino a una modificación conceptual o hacia una ampliación expresiva de los conceptos gnoseológicos hago una relación entre un tipo de entes con un grado máximo de generalidad y naturaleza óptica imprecisa y esta rama de la filosofía. Se trata de los vectores, cuya aparición en la historia de las matemáticas va asociada a una gran virtualidad deductiva y a la facilitación del cálculo geométrico, reduciéndolo a las sencillas reglas del álgebra. Según mi parecer también es posible con ellos dar una interpretación satisfactoria de los distintos niveles en que se encuentran las cualidades en un objeto particular.

Los vectores se representan habitualmente como flechas geométricas o como tuplas algebraicas. Pero los vectores son mucho más y se organizan en una estructura matemática llamada espacio vectorial.

Espacio vectorial es aquel conjunto de que satisface dos propiedades:

1. Existe una operación que relaciona los elementos del conjunto y entrega como resultado un elemento del mismo conjunto (suma vectorial) 2. Dado otro conjunto, formado de escalares (entes numéricos),<sup>17</sup> se puede operar estos entes diferentes (vector y escalar), resultando un vector.

Ahora bien, podemos diferenciar las cosas del mundo mediante la comparación de sus rasgos constitutivos. Cada uno de éstos pertenece a una totalidad óptica, con un número mínimo de cualidades capaz de configurar su inteligibilidad. Todas las cualidades agregadas de las que se puede prescindir, las tendremos por dependientes o en términos tradicionales, por accidentales.

---

<sup>17</sup> Los números reales se caracterizan por su carácter de conjunto numérico ordenado y completo, obediente al axioma del supremo, representando la condición de un objeto infinito, pero abarcable.

Se le llama ordenado, por su cumplimiento de la mayoría, la minoridad o la igualdad, es decir, por su cumplimiento del principio de tricotomía: de dos cosas, una es mayor, menor o igual a la otra..

Es completo por incluir sistemáticamente a todos los números (N, Z, Q, I) por "llenar" la recta numérica, pudiéndose siempre encontrar un número real entre otro dos, zanjando el abismo de Cantor.

Con estas propiedades es posible resolver las distinciones geométricas de la intuición, el estudio de la magnitud unitaria, la medición exhaustiva de la realidad concreta y la construcción de un mundo resuelto en la naturaleza del número.

Por otra parte, se llama escalares tanto a los números reales como a los complejos o imaginarios y se los tiene como numeradores de los vectores. Los complejos, por su parte, si bien poseen mayor generalidad que los reales, a quienes incluyen en su constitución, no son un conjunto ordenado.

Aunque el Análisis representa un gran avance hacia la independencia intelectual humana, está en sus rudimentos supeditado a explicar satisfactoriamente la naturaleza de la realidad sensible. Con la inclusión del Álgebra vectorial, el Análisis se transforma en una disciplina general y absolutamente abstracta, en la cual subsiste, como caso particular, un objeto tridimensional perfectamente estudiable, estática y cinéticamente.

Dicho vectorialmente, un número mínimo de vectores linealmente independientes genera un espacio, cuya dimensión corresponde al número de estos vectores. Geométricamente, por ejemplo, los vectores generadores no pueden ser coplanarios, es decir, tres vectores no coplanarios pueden generar nuestro familiar espacio de tres dimensiones. Un modelo de cuatro dimensiones resulta del anterior más el tiempo, capaz de posibilitar la representación de la trayectoria de una partícula en el espacio, por ejemplo. El concepto general, de índole algebraica, de *dependencia lineal* establece la condición para que un conjunto de vectores constituya una base y genere un espacio.

Definimos primero una *combinación lineal* (CL): Dados vectores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , pertenecientes a un espacio vectorial, y escalares cualesquiera  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , con  $n \in \mathbb{N}$  (números naturales), llamamos CL a la suma siguiente:

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n$$

Los vectores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son *linealmente dependientes* (LD), si y sólo si,

Existen escalares  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , no todos nulos, tal que,

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = 0$$

Asimismo, los vectores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son *linealmente independientes* (LI), si y sólo si,

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Debemos notar que el vector geométrico  $ax$  es un ponderado del vector  $x$ , las magnitudes de estos vectores están en una razón, es decir, son colineales, pertenecen al mismo espacio.

A la operación efectuada entre el escalar y el vector la llamamos *ponderación*, para distinguirla de la multiplicación ordinaria, podemos interpretarla como mejor queramos, siempre que el resultado sea un vector. De este hecho se desprende que la condición para generar un espacio exige vectores LI, irreducibles unos a otros.

En términos gnoseológicos tenemos las cualidades provenientes de los distintos órganos sensoriales, irreductibles unas a otras y que configuran un todo óntico que llamamos objeto concreto o bien su inteligibilidad.

Si asignamos biunívocamente una cualidad a un vector, habrá un número máximo de cualidades diferentes y número mínimo de ellas capaz de generar la inteligibilidad de un objeto, para distinguirlo de otros y recorrer la diversidad de las cosas. De otro modo no puede constituirse nada frente a nosotros. Como consecuencia, dada una cantidad mínima de cualidades constitutivas, dada una base de cualidades, por más que agreguemos otras, no producimos ninguna modificación ontológica.

¿Cuál es el número mínimo de cualidades necesario para generar la inteligibilidad de un objeto? ¿Cuáles son esas cualidades? Si se trata de un objeto físico deberemos tener de él al menos sensación visual, venerada por la tradición como la más completa, nos ofrece de hecho la extensión, la forma, el color, el movimiento de las cosas. De cualquier modo, no podemos prescindir de la sensación acústica, en mundo pleno de posibilidades sonoras. Una pieza musical, por ejemplo, queda comprendida cabalmente, por pura virtud acústica, con la concomitancia de los generadores espacio temporales. El sonido se realiza en un medio espacial y temporal, es captado por un receptor afín e integrado a la inteligibilidad del espíritu musical humano, una cierta proclividad rítmica y armónica, por encima de las diferencias étnicas y culturales. La dimensión del espacio acústico es, por tanto, 5, número mínimo del espacio vectorial cognoscitivo. Es decir,

El número máximo será de 10 o 12, si consideramos además de los cinco sentidos tradicionales, la cenestesia y la cinestesia.<sup>18</sup> El modo como nos relacionamos con el mundo no tiene, pues una dimensión fija. Se mueve desde la generalidad cualitativa de la cenestesia a la especificidad de las cualidades sensoriales.

A esta representación gnoseológica la podemos llamar interpretación vectorial del conocimiento, como contrapartida y complemento de las usuales.

Como resultado tenemos una unificación conceptual para áreas de estudio y de aplicación muy disímiles, como la Física, que se sirve de las interpretaciones geométricas y algebraica y la Gnoseología. Queda por

---

<sup>18</sup> Cenestesia. Del gr. κοινός, común, y αἴσθησις,, sensación.

En psicología se dice de la sensación general de la existencia y del estado del propio cuerpo, independiente de los sentidos externos, y resulta de la síntesis de las sensaciones, simultáneas y sin localizar, de los diferentes órganos y singularmente los abdominales y torácicos.

Cinestesia. Del griego κίνησις, movimiento, y αἴσθησις, sensación.

En psicología se dice de la percepción del equilibrio y de la posición de las partes del cuerpo.

determinar el significado que tienen al interior del espacio gnoseológico las operaciones realizables con los vectores gnoseológicos.

Los conceptos de *base* y *dimensión* resuelven de manera abstracta las intuiciones dimensionales y sus elementos generadores.

Podemos concebir el ente vectorial como una n-tupla de elementos, susceptibles de interpretación geométrica, aritmética o gnoseológica.<sup>19</sup>

El concepto de *base* señala el número mínimo de vectores LI necesarios para generar un espacio vectorial, transformable en otro, isomorfo<sup>20</sup>. La transformación se llama lineal y conserva las operaciones y la estructura de espacio vectorial. Esta transformación o aplicación de un espacio sobre otro o sobre sí mismo, permite relacionar cosas que se aparecen muy diferentes en primera instancia. Tenemos, por ejemplo, las relaciones mecánicas o las vinculaciones semánticas, como la sinonimia que transforma un ente en otro, conservando propiedades que nos permiten afirmar que, en cierto modo, son iguales dos significados. Éstos y la acción de significar pueden ser concebidos como aplicaciones operativas. En un nivel puramente lingüístico, las familias de lenguas pueden pensarse como estructuras aplicables sobre un material surgido del trato particular con la realidad que realiza cada cultura, manteniéndose una cierta identidad general, a pesar de todas las diferencias. En el caso de la sintaxis lógico gramatical es más fácil de ver su reducción a un modelo de índole matemática.

El conocimiento no se acaba aquí por cierto. Debemos incluir zonas disímiles y reacias a la cuantificación, como la ética, la estética y la religiosidad. En todas ellas el ser humano realiza otras tantas dimensiones y configura su existencia desde otros espacios. El punto de vista es arbitrario, cada uno de nosotros realiza en sí un particular sistema de referencia. Los sentimientos despertados en un sujeto por la contemplación de algo, por ejemplo, se organizan desde un origen único y absoluto. La coincidencia de pareceres es imposible, salvo en un nivel puramente conceptual.

Esta postura es, pues intersubjetiva y se orienta hacia el marco de lo que P. Boutroux denomina *objetividad intrínseca*: “La roca que el espíritu halló para fundar sus concepciones es aún el grupo que entonces, y al parecer, constituye el arquetipo de los entes matemático”<sup>21</sup>

La concepción protagórica del relativismo gnoseológico se reintegra en una concepción que reconoce la equivalencia cognoscitiva de las percepciones surgidas en los distintos individuos. La validez de los juicios emitidos a

---

<sup>19</sup>Se ha de tener a la vista para una interpretación geométrica del mundo físico el concepto de sistema de referencia, de referencial, de sistema coordinado. En una representación algebraica, el vector está formado por tuplas de números, cada uno de los cuales corresponde a valores ubicables en los ejes coordinados.

<sup>20</sup> Obviando definiciones técnicas, en términos generales, isomorfismo es una transformación que mantiene las operaciones y la estructura.

<sup>21</sup> Ibidem nota 5, pág. 254, cita de G. Juvet, *la structure des nouvelles théories physiques*, pág. 60, 1993

partir de ellas establecerá la conformidad con su reducción a un patrón teórico.