TEORÍA DE CONJUNTOS Y DIAGRAMAS DE VENN

Gerardo Santana Trujillo
Vilcún, Junio de 2019

Al principio rechazada por algunos matemáticos, con el paso del tiempo se ha convertido en una materia indispensable para la comprensión del mundo numérico.

Tanto la Lógica como la Topología se nutren de sus conceptos y no puede faltar en la formación intelectual de la gente de nuestro tiempo.

Pondremos como fundador de la Teoría de Conjuntos al judío alemán Georg Cantor (1845-1918). En 1874 aparece su primer texto sobre esta materia y sus mejoras y precisiones se suceden en un período de unos 20 años. La influencia de Cantor sobre las matemáticas será comparable al descubrimiento de los números irracionales, en la antigüedad o del cálculo infinitesimal en la época moderna. El trabajo de Cantor convenció en un tiempo relativamente corto a los especialistas. En 1887 se reconoció los conceptos de esta teoría en un congreso internacional de matemáticos.

CONCEPTOS BÁSICOS DE TEORÍA DE CONJUNTOS

Lo primero que debe decirse es que el acercamiento intuitivo a esta materia nos permite una construcción más evidente aunque menos rigurosa, pues no es axiomática. Además, usaremos como sinónimo de "conjunto" el de "clase". De ahí que se pueda hablar de "teoría de conjuntos" o de "lógica de clases".
Los dibujos y diagramas no constituyen, pues, pruebas o demostraciones sino que sirven el propósito de ayudar intuitivamente a la comprensión de los conceptos.

DEFINICIÓN Y COMPARACIÓN DE CONJUNTOS

Hablamos de conjuntos y sus elementos, lo cual equivale aproximadamente a hablar del todo y sus partes. La analogía es aproximada porque podemos hablar de manera más precisa de los conjuntos y sus elementos, que del todo y las partes.

Conjunto y elemento de un conjunto serán tomados como conceptos básicos y no daremos propiamente una definición, así

como también en geometría el punto y la recta se adoptan sin definición. Euclides dice del punto que es aquello que no tiene partes, lo cual no es más que una descripción. En este sentido se debe entender lo que dice Cantor: Un conjunto es "eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen" ("un resumen de determinados objetos bien diferenciados de nuestra intuición o de nuestro pensamiento en un todo").

Algo así ocurre cuando contamos las partes del cuerpo, manos, brazos, orejas etc. Lo que importa son las cuatro características contenidas en su descripción: i)Resumen en un todo; ii) Objetos de la intuición; iii) Objetos del pensamiento; iv) Objetos deteminados y bien diferenciados.

NOTACIÓN, IGUALDADES Y TIPO DE CONJUNTOS

Tomemos como ejemplo un conjunto de tres elementos, triángulo, cuadrado, pentágono. Designamos el conjunto con una letra mayúscula y los elementos con una minúscula. Enseguida ponemos a estos últimos entre llaves:

$F = \{t, c, p\}$

Esta representación tiene como defecto que no puede lidiar con conjuntos con más elementos que las letras del alfabeto. Designamos entonces mejor cada elemento con un número:

$F = \{1, 2, 3\}$

En este caso los números son sólo nombres, no significa pues que cuadrado es el doble de triángulo, etc. Hemos establecido tan sólo una relación uno a uno entre los elementos t,c,p y 1, 2, 3, una relación como la que existe entre los boletos numerados de un cine y cada uno de sus respectivos asientos.

Cada elemento de un conjunto se diferencia de los otros y podemos establecer, por ejemplo que un elemento a pertenece a un conjunto M, lo que escribimos así: $a \in M$, o bien que a no pertenece a M, $a \notin M$.

Tomemos, por ejemplo,

D: La clase de los delfines.
f: Flipper
r: La rana René

Entonces, $f \in D$, significa: "Flipper pertenece a la clase de los delfines" o más coloquialmente, "Flipper es un delfín". Análogamente, $r \notin D$, significa: "La rana René no pertenece a la clase de los delfines", "la Rana René no es un elemento del conjunto D", o bien, La rana René no es un delfín.

Por otra parte, si dos clases A y B tienen los mismos elementos, entonces escribimos A=B. Ambos conjuntos son equivalentes.

Ejemplo:

F: Todas la figuras geométricas de tres lados iguales y ángulos internos iguales a 60º
T: Todos los triángulos equilateros.
Se ve que F = T

Es como escribir:

{1,2,3} = {1,2,3}, o bien {1,2,3} = {2,1,3}. La equivalencia de conjuntos no dice nada del orden o la secuencioa de los elementos, sólo se pide que sean los mismos.

Por ello también se cumple: {1,2,3} = {1,1,2,2,2.3,3,3,3}, ya que los elementos sólo se cuentan una vez.

Resulta evidente que hay gran variedad de conjuntos e incluso algunos que nos son desconocidos. Lo importante es que cada conjunto satisfaga las cuatros características de la descripción de Cantor.

Ejemplos:

L = {Todas las letras del alfabeto español}

S = {Los planetas del sistema solar}

V= {El décimo quinto planeta del sistema solar}

P = {Todos los números primos}

R = (Todos los días de la semana}

Esta manera de presentar conjuntos la llamaremos por **Comprensión** y como contrapartida al enumerar cada uno de los elementos implícitos en la expresión comprensiva, por ejemplo, R = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo} estamos usando la **Extensión** del conjunto.

Especial es el caso de V, pues no tiene elementos y diremos que es un conjunto vacío. Escribiremos en este caso, V = { }, o bien V = ∅ (y leemos "V igual Phi").

EJERCICIOS

i) Escriba como conjunto.

1. Mis padres

2. El presidente actual de Chile

3. El rey de Australia

4. El autor de la Odisea

ii) Establezca cuáles de los siguientes conjuntos son equivalentes.

1. {3,4)={Número de diputados en el Congreso Nacional}

2. {Cantor}= {El fundador de la teoría de conjuntos}

3. {5}={el mayor número primo menor que 4}

4. {1}={el número de satélites naturales de la Tierra}

SUBCONJUNTO Y CONJUNTO POTENCIA

Decimos que A es un subconjunto de B, cuando cada uno de los elementos de A lo es también de B. En este caso, escribimos: $A \subset B$. Decimos también que cada conjunto es subconjunto de sí mismo. Y notamos como ya con ésto comienza Cantor a separarse de la tradición, que tenía siempre al todo como mayor que la parte (Dictum de Omni et Nullo).

A se dice un subconjunto propio de B cuando B tiene al menos un elemento más que A. El subconjunto propio se escribe, $A \subseteq B$.

Si los conjuntos coinciden, entonces A es un subconjunto impropio de B y tienen los mismos elementos.

Si tenemos los siguientes conjuntos:

A={5,6}

B={5,6,7}

C={5,6}

Entonces A es un subconjunto propio de B, y un subconjunto impropio de C, de hecho, A=C.

Consideremos ahora un conjunto S con tres elementos x,y,z,

S={x,y,z}

Si este conjunto tuviera tres subconjuntos ellos coincidirían con los mismos tres elementos del conjunto y ambos conceptos, elemento y subconjunto serían idénticos. Pero no es el caso. Los elementos del conjunto se pueden enumerar directamente, mientras que los subconjuntos se deben calcular. El precedimiento que establece la potencia de un conjunto se realiza así:

1. Se cuenta los elementos del conjunto.

2. El número obtenido se expresa como potencia de 2, por tanto, $2^{N^{\circ} elementos}$ y este número será la llamado Potencia del conjunto.

Si M es un conjunto, la potencia de M la escribimos P(M) = Nº de sus subconjuntos.

Veamos subconjuntos de conjuntos de 0 a 3 elementos:

Elementos	**Subconjuntos**	2^n
A={ }	**P(A)={ } = ∅**	2^0
B={a}	**P(B)={{a},∅}**	2^1
C={a,b}	**P(C)={{a,b},{a},{b},∅}**	2^2
D={a,b,c}	**P(D)={{a,b,c},{a,b},{a,c},{b,c},{a},{b},{c},∅}**	2^3

Observamos que cada conjunto es subconjunto de sí mismo y el conjunto vacío siempre será parte del conjunto potencia. Por tanto: Si C es un conjunto, $C \subset C$ y $\varnothing \subset C$.

EJERCICIOS

1. Tenemos 3 conjuntos:

A={año}

B={auto,tienda,cine}

C={5,6,7,8,9}

i) ¿Cuántos elementos tiene A?

ii) ¿Es "ño" un subconjunto de A?

iii) ¿Es "espejo retrovisor" un subconjunto de B?

iv) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto C?

v) Escriba los subconjuntos de A

vi) Escriba los subconjuntos de B

vii) Escriba los subconjuntos de C

INCLUSIÓN Y PERTENENCIA

La relación subconjunto se llama también relación de inclusión y cumple el propósito de diferenciarla de la relación elemento, en tanto

el lenguaje ordinario las recoge a ambas con el copulativo "es". Por ejemplo: "Cantor es un matemático", significa, "Cantor es elemento de la clase matematicos". En este caso podemos escribir, .

Ahora bien, si tenemos la expresión: "El coigüe es un arbol", no estamos hablando de un coigüe en particular sino de la clase de los coigües. En este caso se afirma, que la clase de los coigües esta incluída en la de los árboles. Se trata, pues, de una relación entre clases.

Los usos de "es" se diferencian por sus propiedades y las podemos expresar con exactitud lógica.

Laes , mientras que la relación elemento, no lo es.

Ejemplo:

A es mayor que B **B es mayor que C** **Por tanto, A es mayor que C**	**La relación "mayor que" es transitiva**
A es el padre de B **B es el padre de C** **Por tanto, A no es el padre de C**	**La relación "ser el padre de" no es una relación transitiva**

Ilustremos ahora la diferencia entre inclusión y elemento.
Ejemplo:

i) **A={3,4.5}**

B={2,{3,4,5}}

A tiene 3 elementos y, por tanto, subconjuntos. B, por su parte, tiene dos elementos y, por tanto, subconjuntos.

Se ve, además, que 3A, pero 3B. A la vez, AB, con AP(B).

ii) Un ejemplo más para establecer la transitividad de la Inclusión y la intransitividad de la relación "ser elemento de":

G={3,4}

H={3,4,5}

Se tiene que {3}G y además GH, por tanto {3}H. Del mismo modo {4}H.

Por el contrario, si tomamos los siguientes conjuntos:

G={3,4}

J={5,6,{3,4}}

3G y GJ, pero 3 no es elemento de J.

Estas relaciones se dejan ver también a través de un silogismo falso (una falacia):

Los seres humanos son numerosos

Sócrates es un ser humano

Por tanto, Sócrates es numeroso.

Es evidente que la falacia se produce al mezclar dos premisas que expresan relaciones distintas, La primera entre la clase de los humanos y la clase de las cosas numerosas. Y la segunda, entre un

elemento particular y la clase de los humanos. La primera es una relación de inclusión; la segunda, una de pertenencia.

Formalmente, el silogismo se puede expresar:

$$\mathbf{H} \subset \mathbf{N}$$

$$\mathbf{S} \in \mathbf{H}$$

Por tanto, $$\mathbf{S} \notin \mathbf{N}$$

Estas relaciones entre clases, e individuos y clases fueron sistematizadas por el lógico matemático alemán, Gotlob Frege (1848-1925).

EJERCICIOS

i) Con A={3,4,5}

B={2,{3,4,5}}

Encuentre los conjuntos potencia, P(A) y P(B)

ii) 1) Llueve y no llueve = 0

2) n +(-n) = 0

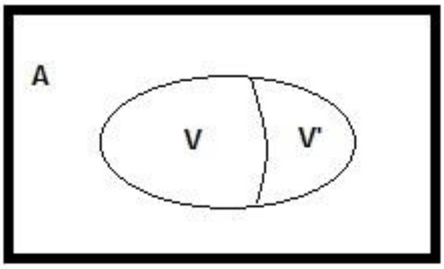
En 2) n es cualquier número (Johnstone, H.W., The Law of Non contradiction. Logique et Analyse 3 (1960) 3-4).
¿Son correctos los enunciados 1) y 2)?

OPERACIONES CON CONJUNTOS

Consideremos un enunciado como el siguiente: "Los estudiantes han tenido siempre un futuro incierto. Algunos se inclinan por los estudios científicos y aún hoy en día quedan los que siguen un camino humanista. La matrícula universitaria acoge apenas una pequeña fracción de los estudiantes que egresan año a año de los distintos liceos y centros de formación técnica". Lo anterior se podría expresar también del siguiente modo: "120 mil estudiantes egresan cada año de los liceos y centros de formación técnica. 60% de ellos elige carreras científicas y del resto 20% elige el área humanística, 10% el área artística y el resto fluctúa durante los tres primeros años."

El segundo modo de expresión es más preciso y resuelve la vaguedad del lenguaje coloquial y permite comparar grupos, conjuntos, de manera más o menos exacta. Las operaciones que se describen a continuación no se alejan demasiado del uso cotidiano.

Con el concepto de complemento pensamos en el conjunto que completa el universo del que forma parte un conjunto dado. Si tomamos, por ejemplo, la clase de los animales vertebrados, el complemento vendrá dado por todos los animales invertebrados:



Este tipo de diagramas fueron usados por leibniz, Euler y Venn.

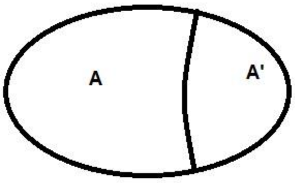
En general, el conjunto complemento, A', es aquel que completa a un conjunto A, tal que A y A' juntos generan un con junto B.

Hay tres situaciones que debemos atender:

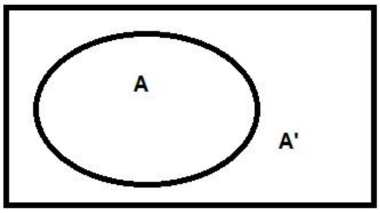
1) A es una parte del conjunto B, entonces A' es su complemento, tal que A y A' juntos forman todo el conjunto B.

2) A=B, entonces, A'= ∅

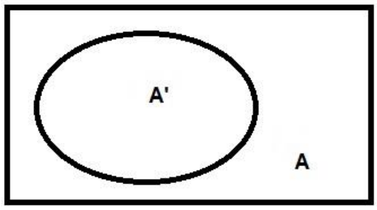
3) A=∅, entonces A'=B



1)



2)



3)

El ámbito completo, es decir, un conjunto y su complemento lo designamos con 1, De donde 2) y 3) se escriben:
A=1, entonces, A'=∅; si A'=1, entonces A= ∅, respectivamente.

EJERCICIO 5

i) 1={los tonos de la escala musical}
A={do,re,mi}

A'=?

ii) 1={Los poderes del Estado}

A={el poder judiacial}

A'=?

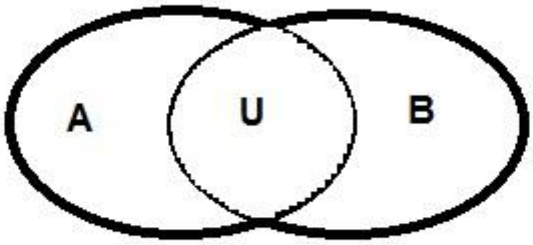
iii) 1={organos sensoriales humanos}

A={oído, vista} ; A'=?

EL CONJUNTO UNIÓN

Si consideramos dos (o más) conjuntos no vacíos, el conjunto unión comprende todos los elementos de ambos conjuntos. Por ejemplo, si A es el conjunto de todos los santiaguinos y B es el conjunto de los universitarios, entonces la unión de A y B comprende a todos los santiaguinos y a todos los universitarios. y particularmente, a los santiaguinos universitarios.

Simbólicamente escribimos: C = A $\cup$ B (y leemos, "A unión B")

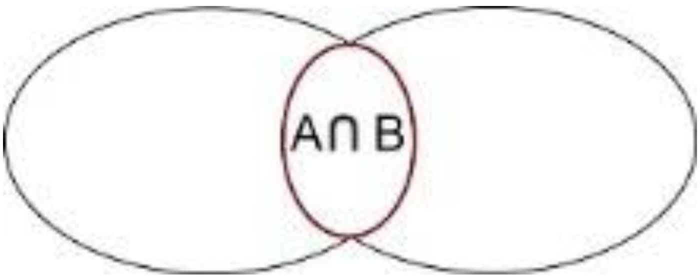


LA INTERSECCIÓN

La intersección es el conjunto formado por aquellos elementos que son comunes a dos (o más) conjuntos.

Si observamos el ejemplo anterior, la intersección entre el conjunto de los santiaguinos y el de los universitarios es precisamente aquel de los santiaguinos universitarios.

Simbólicamente, escribimos A $\cap$ B (y leemos, "A intersección B")

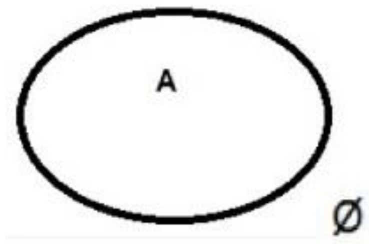


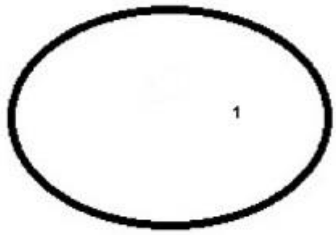
De las definiciones de Unión e Intersección podemos inferir lo siguiente:

$A \cup A' = 1$

$A \cap A' = \varnothing$

Y de los siguientes diagramas podemos anotar cuatro resultados más:





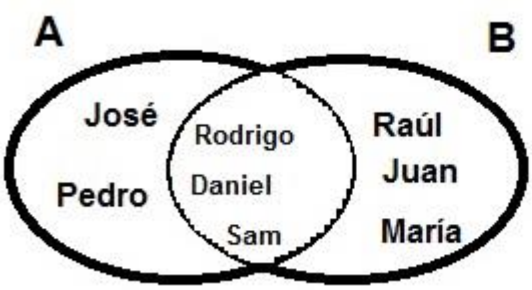
1. **A ⋂ ∅ = ∅**
2. **A ⋃ ∅ =A**

3. **A ⋂ 1=1**
4. **A ⋃ 1=1**

Hay coincidencia con resultados de la aritmética básica:
1. nos recuerda, a * 0 = 0 y 2. coincide con a + 0 = a.

EJERCICIO 6

i) Sean A y B conjuntos como los muestra el siguiente diagrama:



¿Cuáles afirmaciones son correctas?

a) José es un elemento de .

b) Sam es elemento de .

c) = {}

d) {Rodrigo, Daniel} .

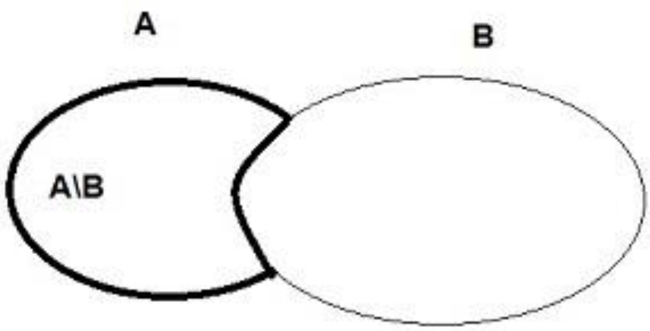
e) {María} .

ii) Encuentre

a) P(A ⋂ B).
b) P(A⋃B).

EL CONJUNTO DIFERENCIA

Dados A y B conjuntos no vacíos, el conjunto que denotamos D=A\B, contiene sólo los elementos de A que no están a la vez en B.



A partir de esta definición, se cumple:

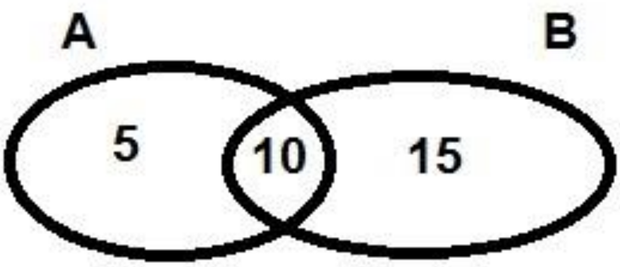
1. B=∅, entonces, A\B = A

2. A=B, entonces, A\B = ∅

Ejemplos

A partir de dos conjuntos comprobemos las operaciones recién introducidas.

Si tenemos el siguiente digrama para dos conjuntos:



Tenemos, pues: A = {5,10} ; B = {10,15}, Por tanto,

1. A⋃B= {5,10}⋃ {10,15} = {5,10,10,15}

Los elementos repetidos los escribimos una sola vez, y por tanto,

A⋃B= {5,10,15}

2. A⋂B = {5,10}⋂{10,15} = {10}

"10" es el único elemento que pertenece tanto a A como a B.

3. A\B = {5,10} \ {10,15} = {5}

"5" es el único elemento que pertenece a A y no pertenece a B.

4. A⋃B'= {5,10}⋃{5} = {5,10} = A

He aquí una notable reducción de signos!

5. A'⋂B' = {15}⋂{5} = { } =∅

6. (A∪B) ∩B' = {5,10,15}∩{5} = {5}

7. A∪B= B∪A (Conmutatividad de la Unión)

{5,10}∪{10,15} = {10,15}∪}{5,10}

{5,10,10,15} = {10,15,5,10}

{5,10,15} = {5,10,15}

EJERCICIOS

i) Mostrar como para la Unión, en el ejemplo de la sección anterior, la Conmutatividad de la Intersección y la Diferencia.

a) A∩B = B∩A

b) A\B = B\A

ii) Muestre la ley de De Morgan:

a) (A∩B)' = A'∪B'

b) (A∪B)' = A'∩B'

iii) ¿Cuáles de las siguientes igualdades son válidas?

a) A∩(A∪B) = A

b) A∪ (A∩B) = A

c) (A∩B) ∪(A'∩B) ∪(A∩B') = 1

d) (A'∩B') ∪(A'∩B) ∪(A∩B') = 1

iv) Formalice de la manera más sencilla posible.

a) {15}

b) {10}

c) {5,15}

v) Simplifique

a) (A∪B') ∩(B'∪A)

b) (A∩B) ∪ (A'∪B)

c) B\(A∩B)

d) (A∪B)\(A\B)

e) (A ∩B) ∪ (A ∩B') ∪(A'∩B) ∪ (A'∩B')

f) (A ∩B) ∪ (A' ∩B) ∪(A∩B')